## 基础课08 函数的奇偶性、周期性与对称性

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. [2024·湖南模拟]已知是偶函数，则（ D ）.

A. B. 1 C. D. 2

[解析]因为 是偶函数，所以 的图象关于直线 对称，所以，解得.故选.

2. 下列函数中，在定义域内既是奇函数又是增函数的是（ B ）.

A. B. C. D.

[解析] 是奇函数，但在整个定义域内不是增函数，故 错误；

，因为,，所以在定义域上是增函数且是奇函数，故 正确；

在定义域上是奇函数但不是单调函数，故 错误；

在 上是奇函数但不是单调函数，故 错误.故选.

3. [2024·安康模拟]设是定义域为的偶函数，且,，则（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]因为 是定义域为 的偶函数，

所以,所以 的周期为2，

所以.故选.

4. [2024·贵州测试]已知函数，则下列结论正确的是（ C ）.

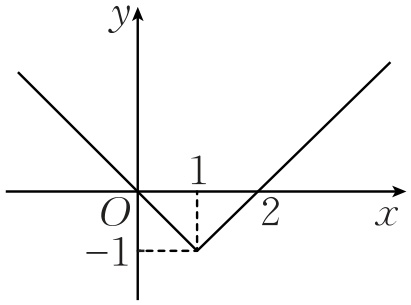
A. 是偶函数

B. 在上单调递增

C. 的图象关于直线对称

D. 的图象与轴围成的三角形的面积为2

[解析]对于，,画出其函数图象，如图所示,



故 不是偶函数，所以 错误；

对于，在 上单调递减，所以 错误；

对于，的图象关于直线 对称，所以 正确；

对于，的图象与 轴围成的三角形的面积为，所以 错误.故选.

5. [2024·安徽联考]已知函数是定义在上的偶函数，函数是定义在上的奇函数，且，在上均单调递减，则（ D ）.

A. B.

C. D.

[解析]因为，在 上均单调递减，是偶函数，是奇函数，所以 在 上单调递减，在 上单调递增.

对于，，但无法判断,的正负，故 不正确；

对于，，在 上是奇函数，所以,又 在 上单调递减，所以,所以，故 不正确；

对于，，在 上单调递减，所以，故 不正确；

对于，，在 上单调递减，所以，故 正确.故选.

6. [2024·潍坊模拟]已知函数的定义域为，为偶函数，，则（ A ）.

A. 为偶函数 B.

C. D.

[解析]因为 为偶函数，所以，

所以 的图象关于直线 对称，所以，

又因为，所以 的图象关于直线 对称，

由 得，所以 是周期为2的函数，即,

由 得，所以 为偶函数，故 正确.

由已知条件不能得到具体的函数值的信息，所以,,不能确定.

故选.

7. [2024·山东模拟]已知函数在上为奇函数，则不等式的解集为（ C ）.

A. B. C. , D.

[解析]因为函数 在 上为奇函数,所以，解得.

又，即，所以，即 解得

所以，.

因为函数 与 在 上单调递增，所以 在 上单调递增，则不等式，即，等价于，即 解得，即不等式的解集为,.故选.

8. [2024·北京测试]已知函数对任意都有，且，当时，，则下列结论正确的是（ D ）.

A. 函数的图象关于点对称

B. 函数的图象关于直线对称

C. 当时，

D. 函数的最小正周期为2

[解析]因为，所以，故，

所以 的周期为4.

又，所以，故 的图象关于直线 对称.

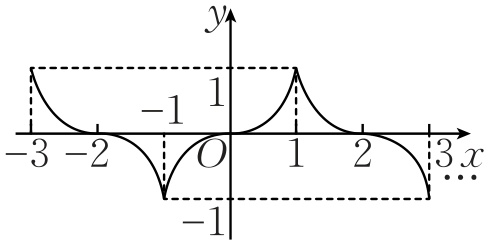
又当 时，，所以画出 的部分图象如图所示.

对于，函数 的图象不关于点 中心对称，故 错误；

对于，函数 的图象不关于直线 对称，故 错误；

对于，当 时，，则，故 错误；

对于，，所以 的最小正周期为2，故 正确.故选.



#### 综合提升练

9*.*(多选题)(2024·九省适应性测试)已知函数*f*(*x*)的定义域为R,且*f*≠0,若*f*(*x+y*)*+f*(*x*)*f*(*y*)*=*4*xy*,则(ABD)*.*

A*.f**-**=*0

B*.f**=-*2

C*.*函数*f**x-*是偶函数

D*.*函数*f**x+*是减函数

[解析]令*x=*,*y=*0,则*f**+f**×f*(0)*=f*[1*+f*(0)]*=*0,

因为*f*≠0,所以1*+f*(0)*=*0,即*f*(0)*=-*1*.*

令*x=*,*y=-*,则*f**-**+f**f**-**=*4*××**-*,

即*f*(0)*+f**f**-**=-*1,由*f*(0)*=-*1,可得*f**f**-**=*0*.*

又*f*≠0,所以*f**-**=*0,故A正确;

令*y=-*,则*f**x-**+f*(*x*)*f**-**=*4*x*·*-*,

即*f**x-**=-*2*x*,故函数*f**x-*是奇函数,

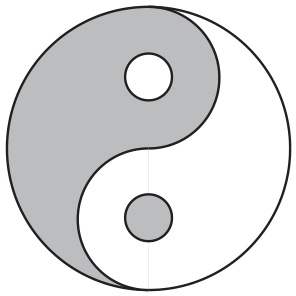
则*f**x+*1*-**=-*2(*x+*1)*=-*2*x-*2,即*f**x+**=-*2*x-*2,故函数*f**x+*是减函数,

令*x=*0,有*f**=-*2,

故B正确,C错误,D正确*.*

故选ABD*.*

10. [2024·曲靖监测]（多选题）中国传统文化中很多内容都体现了数学的“对称美”.如图,太极图是由黑白两个鱼形纹组成的圆形，它充分体现了相互转化、对称统一的形式美、和谐美.若定义：图象能够将圆的周长和面积同时等分成两部分的函数称为圆的一个“太极函数”，则下列说法正确的是（ ABC ）.



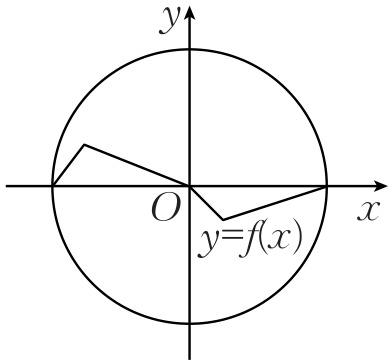
A. 对于任意一个圆，其“太极函数”有无数个

B. 函数可以是某个圆的“太极函数”

C. 正弦函数可以同时是无数个圆的“太极函数”

D. “函数是‘太极函数’”的充要条件为“函数的图象是中心对称图形”

[解析]任意一个圆 是关于圆心成中心对称的图形，其“太极函数”有无数个，故 正确；



函数 是奇函数，其图象关于原点对称，将坐标原点作为圆的圆心，则 是该圆的“太极函数”，故 正确；

将正弦函数 图象的对称中心作为圆的圆心，则正弦函数 是该圆的“太极函数”，故有无数个圆成立，故 正确；

若函数 的图象是中心对称图形，则 是“太极函数”，但当函数 是“太极函数”时，图象不一定是中心对称图形，如图，故 错误.故选.

11. [2024·上海模拟]若定义在上的函数为奇函数，设，且，则的值为  .

[解析]由，可得，因为 为奇函数，所以 图象的对称中心为点，则 图象的对称中心为点，又，所以.

12. [2024·温州模拟]已知定义在上的函数满足，，则0.

[解析]因为，所以，

所以，则，

所以 是周期为4的周期函数，

所以，所以,所以,

又，

所以.

#### 应用情境练

13. [2024·长沙模拟]已知函数的定义域为，且的图象关于点中心对称.当时，，则  .

[解析]因为将 的图象向右平移1个单位长度后得到函数 的图象，且 的图象关于点 中心对称，

所以 的图象关于原点中心对称，所以 在 上是奇函数，所以.

14. [2024·河南模拟]已知函数在上的最大值与最小值分别为和，则经过函数的图象的对称中心的直线被圆截得的最短弦长为  .

[解析]因为，所以.

设，，

因为函数 的定义域关于原点对称，

且，

所以 为奇函数，由已知可得函数 的最大值为，最小值为，

所以，故，

所以,则.

因为 是奇函数，其图象关于原点对称，

所以 的图象关于点,中心对称.

因为,所以点,在圆 的内部.

因为点,到坐标原点的距离为，

所以所求的最短弦长为.

#### 创新拓展练

15. 写出一个满足以下三个条件的函数：（答案不唯一）.

①定义域为；不是周期函数；是周期为 的函数.

[解析] 的解析式形式为 或 均可.

如：定义域为，不是周期函数，且 是周期为 的函数.

16. 已知函数对任意实数,恒有且当，，又.

（1）判断的奇偶性；

（2）求在区间上的最大值；

（3）解关于的不等式.

[解析]（1）的定义域为，关于原点对称，

令，则，所以，

令，则，所以，

所以，所以 是奇函数.

（2）任取,且，

所以，所以，又因为 是奇函数，所以，

因为，所以，所以，

所以 是 上的减函数，

所以在区间 上，，所以.

（3）因为，所以，所以，所以，

又因为，所以，

所以，所以，

所以，解得 ,，所以原不等式的解集为 ,.